Алгебра и геометрия

II семестр

(для студентов факультетов Электроники и РТС)

Индивидуальные домашние задания

Задача 1.1. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ пространства $\mathbb{V}_3$.
1) Показать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют базис пространства $\mathbb{V}_3$.
2) Найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (с помощью матрицы перехода). Сделать проверку.

№		№		№	
1	$\mathbf{a}=(-1,5,-3)$ $\mathbf{b}=(3,1,2)$ $\mathbf{c}=(3,4,1)$ $\mathbf{d}=(2,3,0)$	2	$\mathbf{a}=(4,-1,-3)$ $\mathbf{b}=(-6,1,4)$ $\mathbf{c}=(-1,5,1)$ $\mathbf{d}=(1,-6,-2)$	3	$\mathbf{a}=(-6,-4,1)$ $\mathbf{b}=(-2,-1,2)$ $\mathbf{c}=(3,3,3)$ $\mathbf{d}=(3,2,1)$
4	$\mathbf{a}=(-3,4,3)$ $\mathbf{b}=(-1,2,3)$ $\mathbf{c}=(1,0,-1)$ $\mathbf{d}=(4,-2,-2)$	5	$\mathbf{a}=(4,-5,1)$ $\mathbf{b}=(2,3,-3)$ $\mathbf{c}=(-1,4,-1)$ $\mathbf{d}=(3,-1,2)$	6	$\mathbf{a}=(1,-4,-3)$ $\mathbf{b}=(5,-1,2)$ $\mathbf{c}=(4,-6,-1)$ $\mathbf{d}=(-5,2,3)$
7	$\mathbf{a}=(-3,1,3)$ $\mathbf{b}=(5,-4,2)$ $\mathbf{c}=(1,-2,4)$ $\mathbf{d}=(-2,0,4)$	8	$\mathbf{a}=(4,6,7)$ $\mathbf{b}=(3,1,2)$ $\mathbf{c}=(3,-2,2)$ $\mathbf{d}=(-2,1,3)$	9	$\mathbf{a}=(3,-2,1)$ $\mathbf{b}=(1,2,4)$ $\mathbf{c}=(2,-4,-4)$ $\mathbf{d}=(1,2,2)$
10	$\mathbf{a}=(5,3,1)$ $\mathbf{b}=(-1,2,3)$ $\mathbf{c}=(2,2,2)$ $\mathbf{d}=(-3,1,1)$	11	$\mathbf{a}=(2,1,1)$ $\mathbf{b}=(2,2,-1)$ $\mathbf{c}=(1,-1,3)$ $\mathbf{d}=(4,2,1)$	12	$\mathbf{a}=(1,0,1)$ $\mathbf{b}=(1,-2,0)$ $\mathbf{c}=(0,3,1)$ $\mathbf{d}=(3,-9,-2)$
13	$\mathbf{a}=(4,3,2)$ $\mathbf{b}=(3,-5,1)$ $\mathbf{c}=(2,1,1)$ $\mathbf{d}=(4,-1,2)$	14	$\mathbf{a}=(0,3,1)$ $\mathbf{b}=(1,-1,2)$ $\mathbf{c}=(2,-1,0)$ $\mathbf{d}=(9,-8,1)$	15	$\mathbf{a}=(1,4,2)$ $\mathbf{b}=(-5,3,1)$ $\mathbf{c}=(1,2,1)$ $\mathbf{d}=(-3,20,9)$
16	$\mathbf{a}=(2,-1,4)$ $\mathbf{b}=(1,-1,2)$	17	$\mathbf{a}=(-1,1,2)$ $\mathbf{b}=(3,1,-1)$	18	$\mathbf{a}=(1,-2,0)$ $\mathbf{b}=(-1,1,3)$

Продолжение задачи 1.1 на следующей странице

Продолжение задачи 1.1					
	$\mathbf{c} = (3, 2, 0)$ $\mathbf{d} = (2, 9, -14)$		$\mathbf{c} = (1, 2, 2)$ $\mathbf{d} = (15, 4, -6)$		$\mathbf{c} = (1, 0, 4)$ $\mathbf{d} = (6, -1, 7)$
19	$\mathbf{a} = (5, 1, -2)$ $\mathbf{b} = (-2, 3, 1)$ $\mathbf{c} = (3, 2, -1)$ $\mathbf{d} = (7, 15, -2)$	20	$\mathbf{a} = (2, 0, 1)$ $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ $\mathbf{c} = (4, 1, 2)$ $\mathbf{d} = (8, 0, 5)$	21	$\mathbf{a} = (2, -1, 1)$ $\mathbf{b} = (2, 1, -2)$ $\mathbf{c} = (4, 3, -2)$ $\mathbf{d} = (24, 4, -5)$
22	$\mathbf{a} = (1, -2, 4)$ $\mathbf{b} = (0, -1, 1)$ $\mathbf{c} = (3, 1, -2)$ $\mathbf{d} = (1, 1, -6)$	23	$\mathbf{a} = (0, -2, 3)$ $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$ $\mathbf{c} = (4, 0, 3)$ $\mathbf{d} = (-1, -13, 10)$	24	$\mathbf{a} = (3, 1, -2)$ $\mathbf{b} = (0, 1, 3)$ $\mathbf{c} = (2, 2, -1)$ $\mathbf{d} = (11, 7, -12)$
25	$\mathbf{a} = (1, -1, -2)$ $\mathbf{b} = (2, -1, 4)$ $\mathbf{c} = (1, 0, 2)$ $\mathbf{d} = (1, -3, -2)$	26	$\mathbf{a} = (3, 0, 1)$ $\mathbf{b} = (-2, 1, -1)$ $\mathbf{c} = (4, 2, 2)$ $\mathbf{d} = (-17, -6, -9)$	27	$\mathbf{a} = (-2, 1, -1)$ $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$ $\mathbf{c} = (-2, 0, 1)$ $\mathbf{d} = (23, 4, 0)$
28	$\mathbf{a} = (4, 0, 1)$ $\mathbf{b} = (2, -3, -1)$ $\mathbf{c} = (1, 2, 1)$ $\mathbf{d} = (31, -8, 4)$	29	$\mathbf{a} = (3, 2, -1)$ $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ $\mathbf{c} = (-3, 1, -1)$ $\mathbf{d} = (6, 8, -7)$	30	$\mathbf{a} = (1, 3, 2)$ $\mathbf{b} = (1, -3, 1)$ $\mathbf{c} = (0, -2, 2)$ $\mathbf{d} = (5, 11, 14)$

Задача 1.2. Доказать, что векторы вида $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^4$. Найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства. Найти матрицу перехода от канонического базиса пространства $\mathbb{R}^4$ к построенному базису.

№ вар.	$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$
1	$(2a,\ 3b-a,\ a,\ -b)$
2	$(5b,\ c-a,\ 2a+b,\ c)$
3	$(a+4b,\ 0,\ a-b,\ a)$
4	$(a-b+3c,\ -2b,\ c,\ a+2b)$
5	$(-2a,\ 3a+b,\ -b,\ a)$
6	$(a-2c,\ b-a,\ 3b,\ c)$
7	$(2a+b,\ a,\ 3b+a,\ -2a)$
Продолжение задачи 1.2 на следующей странице	

Продолжение задачи 1.2	
8	$(b-2c,\ -a+b+c,\ a,\ -b)$
9	$(b,\ -3a,\ a-b,\ 0)$
10	$(2b+2c,\ -a,\ b,\ 2a-c)$
11	$(a-2b,\ b,\ 0,\ 2a-b)$
12	$(a,\ b-a-3c,\ 2a+c,\ 2b)$
13	$(b,\ -a,\ 3a+b,\ 2a+3b)$
14	$(2a,\ 2a+b+c,\ 2b,\ a-3c)$
15	$(2b+a,\ b-2a,\ a,\ 3b)$
16	$(a+5c,\ b-2a,\ a+c,\ -b)$
17	$(-2a,\ a,\ 4b+3a,\ -b)$
18	$(a+b+c,\ 3c,\ a-2b,\ a)$
19	$(0,\ 3b-2a,\ a,\ -4b)$
20	$(b,\ -a-c,\ 2a+b,\ 3c+a)$
21	$(2a+b,\ 0,\ -a-5b,\ b)$
22	$(a+5b-c,\ 2c,\ 2a+b,\ a)$
23	$(2a,\ -a,\ 4a,\ 3b-a)$
24	$(a+b+c,\ 3a,\ 2a+b,\ -2c)$
25	$(0,\ 4b-a,\ 2a,\ a-b)$
26	$(a-2b,\ 5b-c,\ c,\ 2a+b)$
27	$(3a-2b,\ 0,\ a,\ 3b)$
28	$(5b-c,\ -a,\ 2a+b+c,\ 3c)$
29	$(2a-3b,\ a+2b,\ 0,\ -b)$
30	$(a+b,\ -3a+c,\ 2a-b,\ 3c)$

Задача 1.3. Пусть $\mathbb{M}$ - множество многочленов $p \in \mathbb{P}_n$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих указанным условиям. Доказать, что $\mathbb{M}$ - линейное подпространство в $\mathbb{P}_n$, найти его базис и размерность. Дополнить базис $\mathbb{M}$ до базиса всего пространства $\mathbb{P}_n$. Найти матрицу перехода от канонического базиса пространства $\mathbb{P}_n$ к построенному базису.

№ вар.	n	Условия на $p(t) \in \mathbb{M}$
1	3	$p(-1) = p(1)$
2	3	$p'(-1) = p'(1)$
Продолжение задачи 1.3 на следующей странице		

Продолжение задачи 1.3		
3	3	$p(-2) = 0$
4	4	$p(-2) = p(3) = 0$
5	4	$p(2 - i) = 0$
6	3	$p'(1) = 0$
7	3	$p(0) + p'(-1) = 0$
8	4	$p(i - 1) = 0$
9	4	$p(t) \vdots (t - 3)^2$
10	3	$p''(1) = 0$
11	4	$p(t) \vdots (t^2 + t + 1)$
12	3	$p(1) = p(2) = 0$
13	3	$2p(0) + p(1) = 0$
14	3	$p(-1) + p(0) + p(1) = 0$
15	3	$p(0) + p'(2) = 0$
16	3	$p(2) = p(-2)$
17	4	$p(1) = p''(0) = 0$
18	3	$p(2) = 0$
19	4	$p(2) = p'(0) = 0$
20	4	$p(1 + i) = 0$
21	3	$p'(-1) = 0$
22	3	$p'(0) + p(1) = 0$
23	4	$p(-2 + i) = 0$
24	4	$p(-1) = p'(-1) = 0$
25	3	$p''(1) + p'(0) = 0$
26	4	$p(t) \vdots (t^2 + t + 2)$
27	3	$p(-1) + p''(0) = 0$
28	3	$p(-1) = 2p(0)$
29	3	$p(-1) + p'(0) + p(1) = 0$
30	4	$p''(0) = p(-1) = 0$

Задача 1.4. Построить базис и найти размерность линейного подпространства M в пространстве всех матриц данного размера. Проверить, что матрица B принадлежит M и разложить ее по найденному базису.

№ вар.	M — множество матриц указанного вида	B
1	Решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2	Решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
5	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
7	Симметричные матрицы 3-го порядка	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
8	Кососимметричные матрицы 3-го порядка	$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
9	Верхнетреугольные матрицы 3-го порядка с нулевым следом	$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 1.4 на следующей странице

Продолжение задачи 1.4		
10	Матрицы 3-го порядка с нулевыми суммами элементов главной и побочной диагоналей	$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
11	Матрицы 3-го порядка, у которых суммы элементов любой строки и любого столбца одинаковы	$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
12	Матрицы 3-го порядка, у которых суммы элементов любой строки и любого столбца равны нулю	$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
13	Матрицы (2×3), у которых суммы элементов в обеих строках одинаковы	$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
14	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
15	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
16	Решения матричного уравнения $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
17	Решения матричного уравнения $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
18	Матрицы, перестановочные с	
Продолжение задачи 1.4 на следующей странице		

Продолжение задачи 1.4		
	матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
19	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
20	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
21	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
22	Симметричные матрицы 3-го порядка с нулевыми суммами элементов первого и третьего столбцов	$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
23	Кососимметричные матрицы 3-го порядка с нулевой суммой элементов первой строки	$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
24	Нижнетреугольные матрицы 3-го порядка с нулевым следом и нулевой суммой элементов побочной диагонали	$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
25	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых одинаковы суммы элементов строк, а суммы элементов столбцов знакочередуются	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 1.4 на следующей странице

Продолжение задачи 1.4		
26	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых одинаковы суммы элементов столбцов, а суммы элементов строк знакочередуются	$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$
27	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых сумма элементов любого столбца равна нулю	$B=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$
28	Матрицы (3×2), у которых суммы элементов любого столбца равны нулю	$B=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&0\\-1&3\end{pmatrix}$
29	Симметричные матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$
30	Симметричные матрицы, антиперестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

Задача 1.5*. Доказать, что множество $\mathbb{M}$ функций x, заданных на области D, образует линейное пространство. Найти его базис и размерность.

№ вар.	Множество $\mathbb{M}$ ($\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ — любые вещественные числа)
1, 16	$M=\{\alpha+\beta\operatorname{ch}t+\gamma\operatorname{sh}t+\delta e^t\},\ t\in(-\infty,\ +\infty)$
2, 17	$M=\{\alpha e^t+\beta e^{2t}+\gamma e^{3t}\},\ t\in(-\infty,\ +\infty)$
Продолжение задачи 1.5 на следующей странице	

Продолжение задачи 1.5	
$3, 18$	$M = \{\alpha + \beta\cos t + \gamma\sin t + \delta\cos^2\frac{t}{2}\},\ t \in [-\pi,\ +\pi]$
$4, 19$	$M = \{\alpha e^{-t} + \beta\,\mathrm{sh}\, t + \gamma e^{t} + \delta\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$5, 20$	$M = \{\alpha e^{-t} + \beta t e^{t} + (\beta - \alpha)t^2 e^{t} + \gamma t^3 e^{t}\},$ $t \in (-\infty,\ +\infty)$
$6, 21$	$M = \{\frac{\alpha}{t} + \beta + \gamma t + \delta\frac{2t^2 - 1}{t}\},\ t \in (0,\ 1)$
$7, 22$	$M = \{\alpha\cos t + \beta\sin t + \gamma\sin 2t\},\ t \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$
$8, 23$	$M = \{\alpha + \beta\,\mathrm{tg}\, t + \gamma\,\mathrm{ctg}\, t\},\ t \in (0,\ \frac{\pi}{2})$
$9, 24$	$M = \{\alpha e^{-t} + \beta\,\mathrm{ch}\, t + \gamma\,\mathrm{sh}\, t + \delta\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$10, 25$	$M = \{\alpha e^{-t} + (\beta - \alpha)t e^{-t} + \gamma t^2 e^{-t} + \alpha t^3 e^{-t}\},$ $t \in (-\infty,\ +\infty)$
$11, 26$	$M = \{\alpha\cos 2t + \beta\sin 2t + \gamma\sin^2 t + \delta\},\ t \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$
$12, 27$	$M = \{\alpha\ln t + \beta + \gamma t + \delta\ln 3t\},\ t \in (0,\ +\infty)$
$13, 28$	$M = \{\alpha + \beta\,\mathrm{tg}^2\, t + \gamma\sec^2 t + \delta\,\mathrm{ctg}^2\, t\},\ t \in (0,\ \frac{\pi}{2})$
$14, 29$	$M = \{\alpha\ln t + \beta + \gamma\ln\frac{2}{t}\},\ t \in (0,\ +\infty)$
$15, 30$	$M = \{\alpha e^{2t} + \beta t e^{2t} + \gamma t^2 e^{2t} + \alpha t^3 e^{2t}\},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$

Задача 1.6*К. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и произведение любого элемента $\mathbf{x}$ на любое действительное число α?

1. Множество всех векторов пространства $\mathbb{V}_3$, координаты которых — целые числа; сумма: $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

2. Множество всех векторов пространства $\mathbb{V}_3$, лежащих на одной оси; сумма: $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

3. Множество всех векторов плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей Ox, Oy; сумма: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

4. Множество всех векторов пространства $\mathbb{V}_3$; сумма: $[\mathbf{x},\ \mathbf{y}]$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

5. Множество всех векторов пространства $\mathbb{V}_3$, лежащих на одной оси; сумма: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, произведение $\alpha|\mathbf{x}|$.

6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; сумма: $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, произведение $\alpha\mathbf{x}$.

7. Множество всех функций $f(t)$, $g(t)$, принимающих положительные значения; сумма: $(f\cdot g)(t)$, произведение: $f^{\alpha}(t)$.

8. Множество всех непрерывных функций $f(t)$, $g(t)$, заданных на отрезке $[0,\ 1]$; сумма: $(f+g)(t)$, произведение: $(\alpha f)(t)$.

9. Множество всех четных функций $f(t)$, $g(t)$, заданных на отрезке $[-1,\ 1]$; сумма: $(f\cdot g)(t)$, произведение: $(\alpha f)(t)$.

10. Множество всех нечетных функций $f(t)$, $g(t)$, заданных на отрезке $[-1,\ 1]$; сумма: $(f+g)(t)$, произведение: $(\alpha f)(t)$.

11. Множество всех линейных функций $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$; сумма: $(f+g)(x,\ y)$, произведение: $(\alpha f)(x,\ y)$.

12. Множество всех многочленов $p(t)$ третьей степени; сумма: $(p+q)(t)$, произведение: $(\alpha p)(t)$.

13. Множество всех многочленов $p(x,\ y)$ степени меньшей или равной трем; сумма: $(p+q)(x,\ y)$, произведение: $(\alpha p)(x,\ y)$.

14. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; сумма $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1y_1,\ x_2y_2, \ldots,$
$x_ny_n)$, произведение: $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \ldots,\ \alpha x_n)$.

15. Множество всех сходящихся последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$; сумма: $\{u_n+v_n\}$, произведение: $\{\alpha u_n\}$.

16. Множество всех диагональных матриц $A = (a_{ij})$ порядка n; сумма: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

17. Множество всех невырожденных матриц $A = (a_{ij})$ порядка n; сумма: $A \cdot B$, произведение: αA.

18. Множество всех диагональных матриц $A = (a_{ij})$ порядка n; сумма: $A \cdot B$, произведение: αA.

19. Множество всех симметрических матриц $A = (a_{ij})$ порядка n; сумма: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

20. Множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел; сумма: $x+y$, произведение: αx.

21. Множество $\mathbb{R}_+$ всех положительных чисел; сумма: $x \cdot y$, произведение: x^α.

22. Множество $\mathbb{R}_-$ всех отрицательных чисел; сумма: $-|x| \cdot |y|$, произведение: $-|x|^\alpha$.

23. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел; сумма: $x \cdot y$, произведение: αx.

24. Множество всех дифференцируемых функций; сумма: $(f \cdot g)(t)$, произведение: $(\alpha f)(t)$.

.

Задача 1.7К. Исследовать на линейную независимость систему функций.

№ вар.	Система функций
$1, 16$	$\sin t,\ \cos t,\ \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
$2, 17$	$2,\ \sin t,\ \sin^2 t,\ \cos^2 t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$3, 18$	$1,\ t,\ \sin t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$4, 19$	$e^t,\ e^{2t},\ e^{3t},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
Продолжение задачи 1.7 на следующей странице	

Продолжение задачи 1.7	
$5, 20$	$t,\ t^2,\ (1+t)^2,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$6, 22$	$\cos t,\ \sin t,\ \sin 2t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
$7, 21$	$1,\ t,\ t^2,\ (1+t)^2,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$8, 23$	$e^t,\ e^{-t},\ e^{2t},\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$9, 24$	$1+t+t^2,\ 1+2t+t^2,\ 1+3t+t^2,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$10, 25$	$1,\ e^t,\ \operatorname{sh} t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$11, 26$	$1,\ t,\ \frac{1}{t},\ t \in (0,\ 1)$
$12, 27$	$1,\ \operatorname{tg} t,\ \operatorname{ctg} t,\ t \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$
$13, 28$	$t,\ 1+t,\ (1+t)^2,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$14, 29$	$e^t,\ te^t,\ t^2e^t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$
$15, 30$	$e^t,\ \operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$

.

Задача 2.1. Линейный оператор $\widehat{C}$ в пространстве $\mathbb{V}_3$ есть последовательное применение линейных операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Найти матрицы операторов $\widehat{A},\ \widehat{B},\ \widehat{C}$ в базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$. Обратим ли оператор $\widehat{C}$? Если да, то описать его геометрическое действие.

№	Операторы
1	Поворот вокруг оси: а) Oz на $90°$, б) Oz на $45°$, в) Ox на $45°$, г) Ox на $30°$, д) Oy на $90°$, е) Oy на $60°$.
2	Проектирование на плоскость: а) xOy, б) xOz, в) yOz.
3	Проектирование на ось: а) Ox, б) Oy, в) Oz.
Продолжение задачи 2.1 на следующей странице	

Продолжение задачи 2.1	
4	Отражение относительно плоскости: а) xOy, б) xOz, в) yOz.
5	Отражение относительно оси: а) Ox, б) Oy, в) Oz.
6	Векторное умножение на вектор: а) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, б) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, в) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, г) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, д) $\mathbf{a} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, е) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
7	Гомотетия с коэффициентом: а) $k = 2$, б) $k = \dfrac{1}{2}$, в) $k = -2$.

№ вар.	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	№ вар.	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	№ вар.	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	№ вар.	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$
1	1а	2б	2	2а	1в	3	3а	4а	4	4а	7а
5	5а	3а	6	6а	2а	7	7а	5а	8	1б	4б
9	2б	6б	10	3б	6в	11	4б	1г	12	5б	2в
13	4б	3в	14	7б	2б	15	1в	5б	16	2в	6г
17	3в	7в	18	4в	2б	19	5в	6д	20	6е	1д
21	7в	2а	22	1г	5б	23	6г	3б	24	1д	4в
25	6д	3б	26	1е	6е	27	6е	4в	28	2а	5б
29	4а	6д	30	7а	1е						

.

Задача 2.2. Линейный оператор $\widehat{A}$ в пространстве $\mathbb{V}_3$ геометрических векторов определяется действием отображения α на концы радиус-векторов точек трехмерного пространства.
1) Найти матрицу линейного оператора $\widehat{A}$ в подходящем базисе пространства $\mathbb{V}_3$, а затем в каноническом базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

2) В какую точку трехмерного пространства переходит точка с координатами $(1,\ 0,\ 0)$ под действием отображения α?
3) Найти A^n, где A — матрица оператора в базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$.

№ вар.	Отображение α
$1, 16$	Отражение относительно плоскости $x + y + z = 0$
$2, 17$	Поворот на 180° вокруг оси $x = y = z$
$3, 18$	Проектирование на ось $x = \dfrac{y}{2} = z$
$4, 19$	Проектирование на плоскость $x + y + z = 0$
$5, 20$	Отражение относительно плоскости $x + y - z = 0$
$6, 21$	Поворот на 180° вокруг оси $x = y = -z$
$7, 22$	Проектирование на ось $2x = 2y = -z$
$8, 23$	Проектирование на плоскость $x - y + z = 0$
$9, 24$	Отражение относительно плоскости $x - y + z = 0$
$10, 25$	Поворот на 180° вокруг оси $-x = y = z$
$11, 26$	Проектирование на ось $x = 2y = 2z$
$12, 27$	Проектирование на плоскость $-x + y + z = 0$
$13, 28$	Отражение относительно плоскости $-x + y + z = 0$
$14, 29$	Поворот на 180° вокруг оси $x = -y = z$
$15, 30$	Проектирование на плоскость $x + y - z = 0$

.

Задача 2.3.
1) Доказать, что $\widehat{A}$ — линейный оператор в пространстве $\mathbb{P}_n$ многочленов степени не выше n.
2) Найти его матрицу в каноническом базисе.
3) Существует ли обратный оператор к $\widehat{A}$? Если да, то найдите его матрицу в том же базисе.

4) Найдите ядро оператора $\widehat{A}$, то есть множество $Ker\widehat{A} = \{p(t) \in \mathbb{P}_n : \ (\widehat{A}p)(t) \equiv \ 0\}$.

№ вар.	n	$(\widehat{A}p)(t)$
$1, 16$	2	$[(t+1) \cdot p(t)]'$
$2, 17$	2	$[t \cdot p(t+1)]'$
$3, 18$	3	$(t+1) \cdot p'(t)$
$4, 19$	3	$t \cdot p'(t+1)$
$5, 20$	3	$p(t) - p(t+2)$
$6, 21$	3	$3t \cdot p(t) - t^2 \cdot p'(t)$
$7, 22$	2	$(t \cdot p(t))' + p''(t)$
$8, 23$	3	$6t \cdot p(t) - t^3 \cdot p''(t)$
$9, 24$	2	$(t+1) \cdot p(t+1) - t \cdot p(t)$
$10, 25$	2	$[(t-2) \cdot p(t)]'$
$11, 26$	3	$[t \cdot p'(t)]'$
$12, 27$	2	$[t \cdot p(t-2)]'$
$13, 28$	3	$t \cdot p'(t) - p(t+1)$
$14, 29$	2	$(t-2) \cdot p(t-2) - t \cdot p(t)$
$15, 30$	2	$(2t+1) \cdot p(t) + t(1-t)p'(t)$

.

Задача 2.4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A. Доказать, что это оператор простого типа, привести его матрицу к диагональному виду (найти матрицу перехода к собственному базису и сделать проверку). Вычислить A^n для любого $n \in N$.

№ вар.	A	№ вар.	A	№ вар.	A
1	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

.

Задача 2.5. Пусть A — матрица оператора $\widehat{A}$ из **задачи 2.2** в каноническом базисе **i**, **j**, **k**. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A. Объясните, как полученный результат связан с геометрическим действием оператора $\widehat{A}$.

Задача 2.6. Оператор $\widehat{A}$ действует в пространстве матриц, образующих линейное подпространство $\mathbb{M}$ в пространстве всех квадратных матриц второго порядка.
1) Доказать, что $\widehat{A}$ — линейный оператор.
2) Найти матрицу оператора $\widehat{A}$ в каком-нибудь базисе пространства $\mathbb{M}$.

3) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}$ (напомним, что в данном случае векторами являются матрицы).
4) Доказать, что $\widehat{A}$ — оператор простого типа, указать базис из собственных векторов.

№ вар.	$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right\}$	$\widehat{A}$	B
$1, 16$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2, 17$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$3, 18$	$x + v = 0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$4, 19$	$x + v = 0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$5, 20$	$x + y + u + v = 0$	$\widehat{A}X = B^{-1} XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$6, 21$	$x - y + u + v = 0$	$\widehat{A}X = B^{-1} XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$7, 22$	$x + y - u - v = 0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$8, 23$	$x - 2y - u - v = 0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$9, 24$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$10, 25$	$y = u$	$\widehat{A}X = B^T XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$11, 26$	$x + v = 0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$12, 27$	$x + y + u + v = 0$	$\widehat{A}X = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$13, 28$	$x + y + 2u + v = 0$	$\widehat{A}X = B^{-1} XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение задачи 2.6 на следующей странице

Продолжение задачи 2.6			
$14, 29$	$x+y+2u-v=0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$15, 30$	$x+y-v=0$	$\widehat{A}X = BX + XB$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

.

Задача 2.7К. Являются ли линейными операторами в пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие преобразования? Найти матрицу линейного оператора в каноническом базисе пространства.

№ вар.	Преобразования $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$
1	$\widehat{A} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$, $\widehat{B} = (6 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2)$, $\widehat{C} = (x_3^4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$
2	$\widehat{A} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2)$, $\widehat{B} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 0,\ x_2^4 + 2x_3)$, $\widehat{C} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2x_3)$
3	$\widehat{A} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$, $\widehat{B} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$, $\widehat{C} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$
4	$\widehat{A} = (3x_1 + 3x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$, $\widehat{B} = (3x_1 + 3x_2 + x_3,\ 1,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$, $\widehat{C} = (3x_1 + 3x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$
5	$\widehat{A} = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6)$, $\widehat{B} = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3)$, $\widehat{C} = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$
Продолжение задачи 2.7 на следующей странице	

Продолжение задачи 2.7	
6	$\widehat{A} = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3),$ $\widehat{B} = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3),$ $\widehat{C} = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$
7	$\widehat{A} = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$ $\widehat{B} = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6),$ $\widehat{C} = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3)$
8	$\widehat{A} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3),$ $\widehat{B} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ x_1^3 + 2x_2 + 3x_3),$ $\widehat{C} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
9	$\widehat{A} = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3^4),$ $\widehat{B} = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3),$ $\widehat{C} = (2x_1 - x_2,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$
10	$\widehat{A} = (x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$ $\widehat{B} = (x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7),$ $\widehat{C} = (x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1^2 + 6x_2 + 7x_3)$
11	$\widehat{A} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0),$ $\widehat{B} = (6x_1 - 5x_2 - 4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0),$ $\widehat{C} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3^2,\ 0)$
12	$\widehat{A} = (5x_1 - 4x_2 - 3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2^3),$ $\widehat{B} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ 1),$ $\widehat{C} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_3)$
	$\widehat{A} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1^2,\ x_2 + 2x_3),$
Продолжение задачи 2.7 на следующей странице	

Продолжение задачи 2.7	
13	$\widehat{B} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_2 + 2x_3)$, $\widehat{C} = (4x_1 - 3x_2 - 2,\ x_1,\ x_2 + 2)$
14	$\widehat{A} = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 0,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3)$, $\widehat{B} = (3x_1 + 2x_2 + 1,\ 0,\ x_1 - 2x_2 - 3)$, $\widehat{C} = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 0,\ x_1^2 - 2x_2 - 3x_3)$
15	$\widehat{A} = (x_1,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$, $\widehat{B} = (x_1,\ x_2^2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$, $\widehat{C} = (x_1,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$
16	$\widehat{A} = (2x_1 + x_2,\ x_3^2,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$, $\widehat{B} = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$, $\widehat{C} = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4)$
17	$\widehat{A} = (x_1,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$, $\widehat{B} = (x_1,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5)$, $\widehat{C} = (x_1,\ x_2^2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$
18	$\widehat{A} = (3x_1 - 2x_2 - 1,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$, $\widehat{B} = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ 0)$, $\widehat{C} = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
19	$\widehat{A} = (2x_1^2 - x_2,\ x_3,\ 2x_2 + 3x_3)$, $\widehat{B} = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ 2x_2 + 3x_3)$, $\widehat{C} = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ 2x_2 + 3)$
20	$\widehat{A} = (0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$, $\widehat{B} = (0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6)$,

Продолжение задачи 2.7 на следующей странице

Продолжение задачи 2.7	
	$\widehat{C}=(0,\ x_1^2+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3)$
21	$\widehat{A}=(6x_1-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_3),$ $\widehat{B}=(6x_1-5x_2-4,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_3),$ $\widehat{C}=(6x_1-5x_2-4x_3^2,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ 0)$
22	$\widehat{A}=(5x_1-4x_2-3,\ 2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3x_3),$ $\widehat{B}=(5x_1-4x_2-3x_3^3,\ 2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3x_3),$ $\widehat{C}=(5x_1-4x_2-3x_3,\ 2x_1-x_2,\ x_1+2x_2+3x_3)$
23	$\widehat{A}=(4x_1-3x_2^2-2x_3,\ x_1+x_3,\ 0),$ $\widehat{B}=(4x_1-3x_2-2x_3,\ x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3),$ $\widehat{C}=(4x_1-3x_2-2,\ x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3)$
24	$\widehat{A}=(3x_1+4x_2+5x_3,\ 6x_1+7x_2+8x_3,\ 9x_1+x_3),$ $\widehat{B}=(3x_1+4x_2+5,\ 6x_1+7x_2+8,\ 9x_1+x_3),$ $\widehat{C}=(3x_1+4x_2+5x_3^3,\ 6x_1+7x_2+8x_3,\ 0)$
25	$\widehat{A}=(2x_1+3x_2+4,\ 5x_1+6x_2+7,\ 8x_1+x_3),$ $\widehat{B}=(2x_1+3x_2+4x_3^3,\ 5x_1+6x_2+7x_3,\ 0),$ $\widehat{C}=(2x_1+3x_2+4x_3,\ 5x_1+6x_2+7x_3,\ 8x_1+x_3)$
26	$\widehat{A}=(x_1^3+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3,\ 0),$ $\widehat{B}=(x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+4x_3,\ 5x_1+6x_2+7x_3),$ $\widehat{C}=(x_1+1,\ 2x_1+3x_2+4,\ 5x_1+6x_2+7x_3)$
27	$\widehat{A}=(3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5x_3),$ $\widehat{B}=(3x_1-2x_2-1,\ x_2+2x_3,\ 3x_1+4x_2+5x_3),$ $\widehat{C}=(3x_1-2x_2-x_3^3,\ x_2+2x_3,\ 0)$

Продолжение задачи 2.7 на следующей странице

Продолжение задачи 2.7	
28	$\widehat{A} = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$, $\widehat{B} = (2x_1 - x_2^3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 0)$, $\widehat{C} = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$
29	$\widehat{A} = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2)$, $\widehat{B} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2)$, $\widehat{C} = (x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6,\ 7x_1 + 8x_2)$
30	$\widehat{A} = (x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$, $\widehat{B} = (x_2 + 2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$, $\widehat{C} = (x_2^3 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$

.

Задача 2.8К. Пусть $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$,
$\widehat{A}\mathbf{x} = (x_2 - x_3,\ x_1,\ x_1 + x_3)$, $\widehat{B}\mathbf{x} = (x_2,\ 2x_3,\ x_1)$. Найти:

№		№		№	
1	$\widehat{A}\widehat{B}\mathbf{x}$	2	$\widehat{A}^2\mathbf{x}$	3	$(\widehat{A}^2 - \widehat{B})\mathbf{x}$
4	$\widehat{B}^4\mathbf{x}$	5	$\widehat{B}^2\mathbf{x}$	6	$(2\widehat{A} + 3\widehat{B}^2)\mathbf{x}$
7	$(\widehat{A^2} + \widehat{B}^2)\mathbf{x}$	8	$(\widehat{B}^2 + \widehat{A})\mathbf{x}$	9	$\widehat{B}\widehat{A}\mathbf{x}$
10	$\widehat{B}(2\widehat{A} - \widehat{B})\mathbf{x}$	11	$\widehat{A}(2\widehat{B} - \widehat{A})\mathbf{x}$	12	$2(\widehat{A}\widehat{B} + 2\widehat{A})\mathbf{x}$
13	$(\widehat{A} - \widehat{B})^2\mathbf{x}$	14	$(\widehat{B} - 2\widehat{A}^2)\mathbf{x}$	15	$\widehat{B}\widehat{A}^2\mathbf{x}$
16	$(3\widehat{A}^2 + \widehat{B})\mathbf{x}$	17	$(\widehat{A}^2 + \widehat{B})\mathbf{x}$	18	$(\widehat{A}^2 - \widehat{B}^2)\mathbf{x}$

Продолжение задачи 2.8 на следующей странице

Продолжение задачи 2.8					
19	$(2\widehat{B}-\widehat{A}^2)\mathbf{x}$	20	$\widehat{B}^3\mathbf{x}$	21	$(\widehat{B}^2-2\widehat{A})\mathbf{x}$
22	$(\widehat{A}(\widehat{B}+\widehat{A}))\mathbf{x}$	23	$\widehat{A}\widehat{B}^2\mathbf{x}$	24	$(\widehat{A}(\widehat{B}-\widehat{A}))\mathbf{x}$
25	$2(\widehat{B}+2\widehat{A}^2+\widehat{B}^2)\mathbf{x}$	26	$(\widehat{B}(\widehat{A}-\widehat{B}))\mathbf{x}$	27	$(\widehat{B}-\widehat{A}+\widehat{B}^2)\mathbf{x}$
28	$(\widehat{B}(\widehat{A}+\widehat{B}))\mathbf{x}$	29	$(\widehat{A}+\widehat{B}\widehat{A}-\widehat{B})\mathbf{x}$	30	$(3\widehat{B}+2\widehat{A}^2)\mathbf{x}$

.

Задача 2.9К. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\widetilde{S}=\{\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \mathbf{f}_3\}$, где $\mathbf{f}_1=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\ \mathbf{f}_2=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{f}_3=-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$, если она задана в базисе $S=\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$.

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
1	$\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&4\\1&-1&2\end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix}0&3&2\\2&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix}0&1&2\\4&0&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&3&1\end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&2\\1&3&-1\end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\3&-1&1\end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix}1&0&2\\3&0&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$
Продолжение задачи 2.9 на следующей странице					

Продолжение задачи 2.9					
19	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

.

Задача 2.10K. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе **i**, **j**, **k**), ядро и образ оператора.

№	Оператор $\widehat{A}$
1	Проектирование на ось Ox
2	Проектирование на плоскость $z = 0$
3	Проектирование на ось Oz
4	Зеркальное отражение относительно плоскости yOz
5	Проектирование на ось Oy
6	Проектирование на плоскость $y = 0$
7	Зеркальное отражение относительно плоскости $x - y = 0$
8	Зеркальное отражение относительно плоскости $y + z = 0$
9	Проектирование на плоскость $y - z = 0$
10	Проектирование на плоскость $y = \sqrt{3}x$
11	Проектирование на плоскость yOz
12	Зеркальное отражение относительно плоскости $x - z = 0$
13	Зеркальное отражение относительно плоскости xOy
Продолжение задачи 2.10 на следующей странице	

Продолжение задачи 2.10	
14	Поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси Ox против часовой стрелки
15	Проектирование на плоскость $x - y = 0$
16	Проектирование на плоскость $y + z = 0$
17	Зеркальное отражение относительно плоскости $x + y = 0$
18	Зеркальное отражение относительно плоскости $y - z = 0$
19	Проектирование на плоскость $x + y = 0$
20	Проектирование на плоскость $x - z = 0$
21	Зеркальное отражение относительно плоскости $x + z = 0$
22	Поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси Oz против часовой стрелки
23	Проектирование на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$
24	Зеркальное отражение относительно плоскости xOz
25	Поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси Oy против часовой стрелки
26	Проектирование на плоскость $x + z = 0$
27	Проектирование на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$
28	Проектирование на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$
29	Проектирование на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$
30	Поворот на угол $\pi/4$ вокруг оси Oz против часовой стрелки

.

Задача 2.11K. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A.

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
Продолжение задачи 2.11 на следующей странице					

Продолжение задачи 2.11					
7	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

.

Задача 3.1. Задана квадратичная форма $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)$.
1) Привести ее к каноническому виду методом Лагранжа, выписав соответствующее преобразование переменных.
2) Привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием.
3) Проверить закон инерции квадратичных форм на примерах преобразований, полученных в п.п.1)—2).
4) Какая поверхность задается уравнением $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 1$?

№ вар.	Квадратичная форма $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)$
1	$4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$
2	$-2x_2x_3$
3	$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$
4	$2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$
5	$-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$
6	$2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$
7	$4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$
8	$3x_1^2+x_2^2-\frac{3}{2}x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_2-x_1x_3+\sqrt{3}x_2x_3$
9	$-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$
10	$x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$
11	$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$
12	$3x_1^2-7x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$
13	$x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$
14	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
15	$-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$
Продолжение задачи 3.1 на следующей странице	

Продолжение задачи 3.1	
16	$-\frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$
17	$-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$
18	$-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$
19	$2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$
20	$-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
21	$10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$
22	$\frac{3}{2}x_1^2 - 5x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$
23	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$
24	$2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$
25	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
26	$x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$
27	$5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$
28	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
29	$5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$
30	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

.

Задача 3.2. Выписать квадратичную форму с данной матрицей A. Привести ее к каноническому виду, определить ранг, положительный и отрицательный индексы в зависимости от значений параметра a. При каких значениях a форма положительно определена?

№ вар.	Матрица A	№ вар.	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a+1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a+4 & 2a-2 \\ -1 & 2a-2 & 5a \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} a+4 & 2 & 2a-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2a-2 & -1 & 5a \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} a+4 & 2a-2 & 2 \\ 2a-2 & 5a & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & a+1 & a-1 \\ 1 & a-1 & 2a \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} a+1 & -1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -1 \\ a-1 & 2a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & a+4 & a-4 \\ -2 & a-4 & 2a \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} a+4 & 2 & a-4 \\ 2 & 1 & a-2 \\ a-4 & -2 & 2a \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} a+4 & a-4 & 2 \\ a-4 & 2a & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1+4a & 1-2a \\ -1 & 1-2a & 3a \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1+4a & -1 & 1-2a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1-2a & -1 & 3a \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1+4a & 1-2a & 1 \\ 1-2a & 3a & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 2-a \\ 2 & 2-a & 2a \end{pmatrix}$
Продолжение задачи 3.2 на следующей странице			

Продолжение задачи 3.2			
17	$\begin{pmatrix} 2a & 2 & 2-a \\ 2 & 1 & 1 \\ 2-a & 1 & a+1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} a+1 & 2-a & 1 \\ 2-a & 2a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9a+9 & 3a-3 \\ -1 & 3a-3 & 6a \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 6a & 3a-3 & -1 \\ 3a-3 & 9a+9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 9a+9 & 3 & 3a-3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3a-3 & -1 & 6a \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & a+1 & a-1 \\ 2 & a-1 & 4a \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 4a & a-1 & 2 \\ a-1 & a+1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -2 \\ a-1 & 4a & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & a+1 & 3-2a \\ 3 & 3-2a & 5a \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 5a & 3-2a & 3 \\ 3-2a & a+1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 3-2a \\ 1 & 1 & 3 \\ 3-2a & 3 & 5a \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & 1-2a \\ -1 & 1-2a & 6a \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 6a & -1 & 1-2a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1-2a & -1 & a+1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} a+1 & 1-2a & -1 \\ 1-2a & 6a & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

.

Задача 3.3К. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Сделать чертеж.

№ вар.	Уравнение кривой
1	$-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$
2	$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
Продолжение задачи 3.3 на следующей странице	

Продолжение задачи 3.3	
3	$4xy + 4x - 4y = 0$
4	$-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$
5	$-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$
6	$-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
7	$-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$
8	$-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$
9	$4xy + 4x - 4y - 2 = 0$
10	$x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$
11	$x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$
12	$x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$
13	$2xy + 2x + 2y - 3 = 0$
14	$4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$
15	$3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$
16	$x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$
17	$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$
18	$4xy + 4x + 4y + 1 = 0$
19	$3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$
20	$-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$
21	$5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$
22	$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$
23	$-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$
24	$2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$
25	$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$
26	$-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$
27	$2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0$
28	$x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$
29	$4xy + 4x - 4y + 4 = 0$
Продолжение задачи 3.3 на следующей странице	

Продолжение задачи 3.3	
30	$3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0$

.

Задача 4.1. В пространстве $\mathbb{V}_3$ геометрических векторов с обычным скалярным произведением векторы базиса $S = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ заданы координатами в базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$.
1) Найдите матрицу Грама G_S скалярного произведения в этом базисе. Выпишите формулу для длины вектора через его координаты в базисе S.
2) Ортогонализуйте базис S. Сделайте проверку ортонормированности построенного базиса P двумя способами:
а) выписав координаты векторов из P в каноническом базисе $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$;
б) убедившись, что преобразование матрицы Грама при переходе от базиса S к базису P (по формуле $G_P = C^T G_S C$, где C — матрица перехода от базиса S к базису P) приводит к единичной матрице.

№	Базис S	№	Базис S	№	Базис S
1, 16	$\mathbf{e}_1=(1,-1,1)$ $\mathbf{e}_2=(2,1,0)$ $\mathbf{e}_3=(0,1,1)$	2, 17	$\mathbf{e}_1=(1,0,1)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,-1)$ $\mathbf{e}_3=(2,-1,0)$	3, 18	$\mathbf{e}_1=(1,-1,0)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(1,0,2)$
4, 19	$\mathbf{e}_1=(1,0,2)$ $\mathbf{e}_2=(2,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(1,1,0)$	5, 20	$\mathbf{e}_1=(0,-1,2)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,-1)$ $\mathbf{e}_3=(2,0,1)$	6, 21	$\mathbf{e}_1=(1,1,-1)$ $\mathbf{e}_2=(2,0,1)$ $\mathbf{e}_3=(1,1,2)$
7, 22	$\mathbf{e}_1=(2,0,1)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,-1)$ $\mathbf{e}_3=(1,2,1)$	8, 23	$\mathbf{e}_1=(-1,1,1)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,-1)$ $\mathbf{e}_3=(2,0,1)$	9, 24	$\mathbf{e}_1=(2,0,1)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(-2,0,1)$
10, 25	$\mathbf{e}_1=(1,1,0)$ $\mathbf{e}_2=(2,0,1)$ $\mathbf{e}_3=(1,1,1)$	11, 26	$\mathbf{e}_1=(1,0,-1)$ $\mathbf{e}_2=(2,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(1,1,0)$	12, 27	$\mathbf{e}_1=(2,-1,0)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(-1,0,1)$
13, 28	$\mathbf{e}_1=(1,0,2)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(-1,2,0)$	14, 29	$\mathbf{e}_1=(-1,1,0)$ $\mathbf{e}_2=(-2,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(1,0,1)$	15, 30	$\mathbf{e}_1=(1,1,-1)$ $\mathbf{e}_2=(1,1,1)$ $\mathbf{e}_3=(2,1,0)$

.